

DIEU

Note sur les épicycloïdes

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 125-129

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__125_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

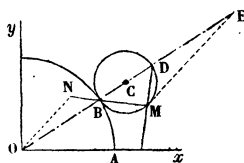
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LES ÉPICYCLOÏDES;

PAR M. DIEU,

Professeur à la Faculté de Lyon.

La théorie des épicycloïdes a une grande importance, en raison de ses applications au tracé des engrenages ; ainsi, dans les engrenages à flancs, les plus employés de tous, ce sont des arcs d'épicycloïdes qui terminent les profils des dents des deux roues, si l'engrenage est réciproque, ou seulement de la roue conductrice, si l'engrenage est simple, et, dans les engrenages à fuseaux, les profils des dents de la roue conductrice sont des développements d'épicycloïdes. Cette théorie a donc attiré l'attention d'éminents géomètres, et nous devons craindre que le mode de construction de la développée qui fait l'objet de cette Note ne soit pas nouveau ; cependant nous le livrons au jugement des érudits et des dessinateurs : les premiers décideront s'il est original, les derniers nous sauront peut-être gré de le faire connaître, ou de le rappeler, s'ils veulent bien s'assurer par quelques essais de l'extrême facilité et de la grande exactitude qu'il procure.



Soient (O, OA) le cercle fixe, (C, CB) le cercle rou-

lant dans une de ses positions, où il touche en B le précédent, D le point diamétralement opposé à B, et M le point décrivant.

Voici la règle très-simple de construction du centre de courbure :

« Prolongez OD de $DE = OA$, tirez ME, et menez du point O une parallèle à ME, qui va rencontrer en N le prolongement de la normale MB; le point N est le centre de courbure correspondant à M. »

Cette règle convient aussi bien aux épicycloïdes intérieures qu'aux extérieures, et la démonstration est la même pour ces deux genres; nous considérerons le second.

En prenant l'axe des x suivant le rayon du cercle fixe qui passe en A, lorsque M s'est trouvé sur ce cercle, si l'on désigne par R, r les rayons OA, CB, par n le rapport $\frac{R}{r}$, et par φ l'angle BCM, les deux équations

$$(1) \quad \begin{cases} x = R \left[\cos n\varphi + 2n \sin \frac{\varphi}{2} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi \right], \\ y = R \left[\sin n\varphi - 2n \sin \frac{\varphi}{2} \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi \right], \end{cases}$$

représentent la courbe. De ces équations et de la formule

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} : \frac{dx}{d\varphi},$$

on tire

$$\frac{dy}{dx} = \tan \left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi,$$

de laquelle il est facile de conclure que la normale en M passe par le point de contact B.

Mettant ces valeurs de $x, y, \frac{dy}{dx}$, en fonction de φ ,

dans l'équation générale connue

$$(y - y') \frac{dy}{dx} + \xi - x = 0,$$

on a pour la normale

$$y - R \sin n\varphi + (\xi - R \cos n\varphi) \cdot \cot \left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi = 0,$$

et en dérivant cette équation par rapport à φ considérée comme seule variable, il vient

$$2nR \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi + (2n + 1)(\xi - R \cos n\varphi) = 0,$$

qui achève de déterminer le centre de courbure. Ces deux équations donnent, pour les coordonnées de ce centre, les formules

$$(2) \quad \begin{cases} \xi = R \left[\cos n\varphi - \frac{2n}{2n+1} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi \right], \\ \eta = R \left[\sin n\varphi + \frac{2n}{2n+1} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi \right], \end{cases}$$

dont la comparaison avec les équations (1) montre que la développée est une épicycloïde. [Afin de le reconnaître avec précision, on déduit des équations (1) et (2), les carrés des rayons vecteurs OM et O, (ξ, η) ; le rayon du cercle fixe de la développée $= \frac{R}{2n+1}$, et le rapport de l'autre rayon à celui-là est n , comme pour la proposée.]

Des quatre équations (1) et (2), on tire

$$\xi - x = - \frac{4n(n+1)}{2n+1} R \sin \frac{\varphi}{2} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi,$$

$$\eta - y = \frac{4n(n+1)}{2n+1} R \sin \frac{\varphi}{2} \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi,$$

et, par conséquent, en désignant par ρ le rayon de cour-

bure, il vient

$$\rho = \pm \frac{4n(n+1)}{2n+1} R \sin \frac{\varphi}{2} = \pm \frac{4r(r+R)}{2r+R} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Enfin, comme $\pm 2r \sin \frac{\varphi}{2} = MB$, on a

$$\rho = MB + \frac{MB \cdot OB}{OD},$$

dont notre règle n'est que la traduction en langage ordinaire; cette règle est conséquemment démontrée. Si l'on convient d'appeler MB la normale en B à l'épicycloïde, la formule précédente conduit encore à cet énoncé :

« Le rayon de courbure et la normale en chaque point » d'une épicycloïde sont dans un rapport constant, qui » surpasse de 1 celui des rayons du cercle fixe et du cercle » roulant. »

Il suffit de changer n, γ, η en $-n, -\gamma, -\eta$ dans toutes les formules précédentes, pour avoir celles qui se rapportent aux épicycloïdes intérieures.

Nous n'avons besoin de rien ajouter sur le tracé des épicycloïdes (engrenages à flancs). Quant au profil d'une roue conductrice dans les engrenages à fuseaux, il est bon de faire remarquer que deux manières de procéder se présentent : 1°. On peut décrire par points une partie de l'épicycloïde qui donnerait le profil, si le cercle qui représente celui d'un fuseau se réduisait à son centre, puis chercher (par la règle) les points correspondants de la développée, et enfin diminuer tous les rayons de courbure du rayon des fuseaux. 2°. On peut aussi décrire immédiatement par points la développée, épicycloïde dont le cercle fixe et le cercle roulant se construisent sans difficulté, puis, N étant un de ces points, chercher M par la règle inverse ; enfin, diminuer MN du rayon des fuseaux, etc.

Pour le tracé des profils épicycloïdaux, les cercles osculateurs ont un très-grand avantage sur les cercles tangents généralement adoptés d'après M. Poncelet. [Feu M. Savary a proposé l'emploi du cercle osculateur dans ses cours à l'École Polytechnique. Y donnait-il la construction du centre de courbure que nous indiquons? Nous n'avons pu nous fixer à cet égard; mais il nous semble que s'il l'avait donnée, l'usage des cercles osculateurs aurait prévalu.] Dans la plupart des cas, les cercles tangents diffèrent beaucoup trop des cercles osculateurs respectifs, pour ne pas s'éloigner très-sensiblement de l'épicycloïde, même fort près du contact, et, par conséquent, on doit en employer beaucoup plus pour tracer un profil avec assez d'exactitude. Il est facile de justifier cette assertion, en discutant la dernière expression de ρ . Son second terme $\frac{MB \cdot OB}{OD}$ n'est pas en général très-petit par rapport au premier MB, et peut même en approcher beaucoup.

En effet, 1° si $OB > CB$, ce qui est le cas du profil d'une roue engrenant avec un pignon, on a $OD < 3OB$, par suite $\frac{MB \cdot OB}{OD}$ ou $BN > \frac{1}{3}MB$, et la différence $OD - OB$ peut être fort petite, de sorte que BN soit très-voisin de MB; 2° si $OB < CB$, ce qui est le cas du profil d'un pignon, on a $OD > 3OB$, par suite $BN < \frac{1}{3}MB$, mais BN peut être très-près de cette limite supérieure. Or BN est, pour ainsi dire, l'erreur sur le rayon du cercle que l'on prend, au lieu du cercle osculateur.