

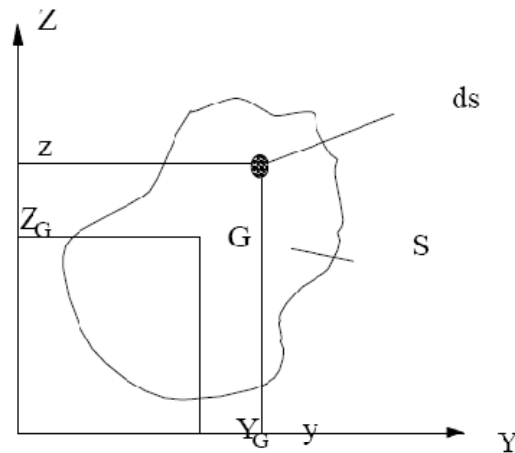
# Chapitre 1

## CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS

### 1 Centre de gravité

On appelle centre de gravité d'une section le point à travers lequel si on applique une force, elle résulte en une pression uniforme sur toute la section. Les coordonnées du centre de gravité  $G(Y_G, Z_G)$  d'une section homogène (S) (Fig. 1) sont données par les relations:

$$Y_G = \frac{1}{S} \iint_S y ds \quad Z_G = \frac{1}{S} \iint_S z ds$$

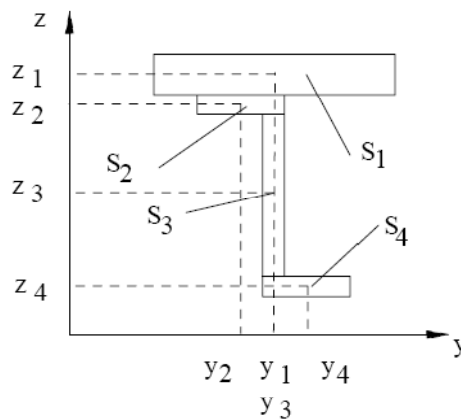


**Fig. 1**

y et z étant les coordonnées de l'aire élémentaire ds.

Ces intégrales peuvent être évaluées analytiquement si le contour de la section est exprimé par des expressions mathématiques simples. Si par contre le contour est une courbe irrégulière, on procède dans ce cas par les méthodes numériques. La méthode la plus simple consiste à discrétiser la section en éléments de surface  $s_i$  et faire la sommation comme suit:

$$Y_G = \frac{\sum y_i s_i}{\sum s_i} \quad Z_G = \frac{\sum z_i s_i}{\sum s_i}$$



**Fig. 2**

## 2 Moments statiques

On considère l'aire d'une section (S) dans le plan défini par le système d'axe YOZ (Fig. 1). On appelle les moments statiques de l'aire (S) par rapport aux axes OY et OZ les quantités:

$$S_y = \iint_S z ds \qquad S_z = \iint_S y ds$$

Par analogie avec le moment d'une force par rapport à un axe quelconque, le moment statique de l'aire d'une section par rapport à un axe situé dans son plan est égal au produit de la surface de la section par la distance de son centre de gravité à l'axe considéré.

$$S_y = S \cdot Z_G \qquad S_z = S \cdot Y_G$$

Pour les surfaces complexes discrétisées en n aires simples, les moments statiques par rapport aux axes Oy et Oz seront respectivement égaux à:

$$S_y = \sum_{i=1}^n s_i z_i \qquad S_z = \sum_{i=1}^n s_i y_i$$

**Le moment statique d'une surface par rapport à un axe passant par son centre de gravité est nul.**

## Moments d'inertie (moments quadratiques)

On appelle moment quadratique l'intégrale des produits des aires élémentaires par le carré de leurs distances à partir de l'axe considéré, ainsi, les moments d'inertie d'une surface (S) quelconque par rapport à OY et OZ sont les suivants:

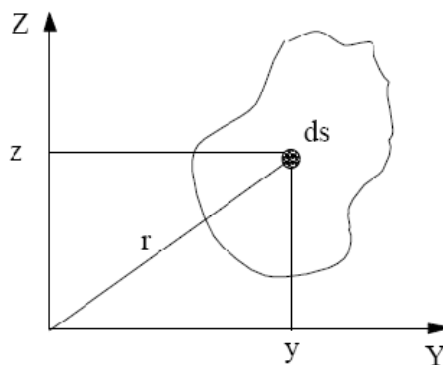
$$I_Y = \iint_S z^2 ds \qquad I_Z = \iint_S y^2 ds$$

**Les moments d'inertie par rapport aux axes passant par le centre de gravité de la section sont des moments centraux.**

## 4 Moment d'inertie polaire

On appelle moment d'inertie polaire d'une surface (S) par rapport à un point donné (pôle O) l'intégrale des produits des aires élémentaires par le carré de leurs distances r à partir du pôle. Il représente la capacité de la section à s'opposer aux déformations angulaires sous l'effet de la torsion.

$$I_p = \iint_S r^2 ds = \iint_S (z^2 + y^2) ds = I_z + I_y$$



**Fig. 3**

**Il en résulte que le moment d'inertie polaire par rapport à un point est la somme des moments d'inertie par rapport à deux axes orthogonaux passant par ce point.**

## 5 Produit d'inertie (moment d'inertie centrifuge)

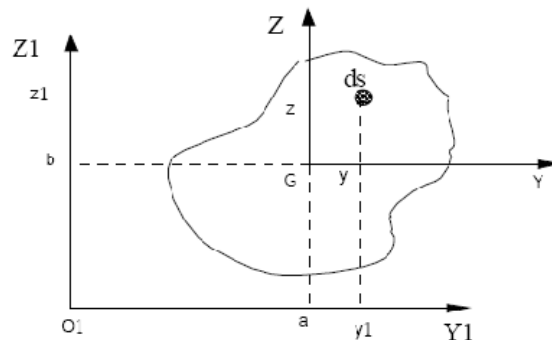
On appelle moment produit, l'intégrale des produits des propriétés des aires élémentaires par leurs distances comptées à partir des axes de coordonnées  $z, y$  :

$$I_{YZ} = \iint_S yz ds$$

### **Remarques:**

- Les moments d'inertie quadratiques et polaire sont toujours positifs
- Selon la disposition des axes,  $I_{YZ}$  peut être positif, négatif ou nul.
- En chaque point d'une aire plane, il existe deux axes orthogonaux par rapport auxquels le produit d'inertie est nul ( $I_{yz} = 0$ ). Les deux axes ainsi définis sont appelés axes principaux d'inertie.
- Les axes sont principaux quand l'un des axes au moins constitue un axe de symétrie de la section. En effet, en raison de symétrie le produit d'inertie est nul par rapport à cet axe qui est donc une direction principale, la seconde étant nécessairement orthogonale.

## 6 Théorème d'Huygens



**Fig. 4**

$$I_Z = \iint_S y^2 ds$$

$$I_Y = \iint_S z^2 ds$$

$$I_{YZ} = \iint_S yz ds$$

Les moments par rapport à  $Y1, Z1$  :

$$I_{Z1} = \iint_S y_1^2 ds ; I_{Y1} = \iint_S z_1^2 ds ; I_{Z1Y1} = \iint_S y_1 z_1 ds$$

Sachant que :

$$y_1 = y + a \quad z_1 = z + b$$

En substituant  $y_1$  et  $z_1$  par leurs valeurs, on aura :

$$\begin{aligned} I_{Z1} &= \iint_S (y + a)^2 ds \\ &= \iint_S (y^2 + 2ay + a^2) ds \\ &= \iint_S y^2 ds + 2a \iint_S y ds + a^2 \iint_S ds \end{aligned}$$

Comme les moments statiques de l'aire par rapport aux axes centraux sont nuls, le terme

$$\iint_S y ds = 0$$

et

$$\iint_S y^2 ds = I_z \quad a^2 \iint_S ds = a^2 S$$

d'où

$$I_{z1} = I_z + a^2 S$$

Le même travail peut être fait pour  $I_{y1}$  et nous trouverons :

$$I_{y1} = I_y + b^2 S$$

**D'où le théorème d'Huygens:**

1. "Le moment d'inertie d'une surface par rapport à un axe quelconque est égal au moment d'inertie de cette surface par rapport à l'axe parallèle passant par le centre de gravité, augmenté du produit de l'aire par le carré de la distance mutuelle des deux axes".
2. "Le moment d'inertie centrifuge par rapport à un système d'axes orthogonal est égal au moment d'inertie centrifuge par rapport au système d'axes centraux parallèles aux axes donnés plus le produit de l'aire de la section par les coordonnées de son centre de gravité dans le nouveau système d'axes.

## 7 Moments d'inertie principaux

Les équations de transformations expriment les variations des moments d'inertie en fonction de l'angle de rotation  $\alpha$ . Les valeurs maximales et minimales sont particulièrement recherchées. Ils correspondent à un moment d'inertie centrifuge  $I_{YZ} = 0$ .

On obtient ainsi l'orientation des axes principaux:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}$$

Les valeurs des moments d'inertie principaux peuvent être obtenues à partir des formules générales

$$I_1 = \frac{I_y + I_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \quad I_2 = \frac{I_y + I_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

## 8 Représentation géométrique des moments d'inertie(cercle de MOHR)

$I_y, I_z, I_{yz}$  connus ;  $I_1, I_2, \alpha$  inconnus.

- On choisi un système de coordonnées orthogonal  $O I_{y,z}, I_{yz}$  et une échelle adéquate

- On construit A ( $I_y, I_{yz}$ ) et B ( $I_z, -I_{yz}$ )

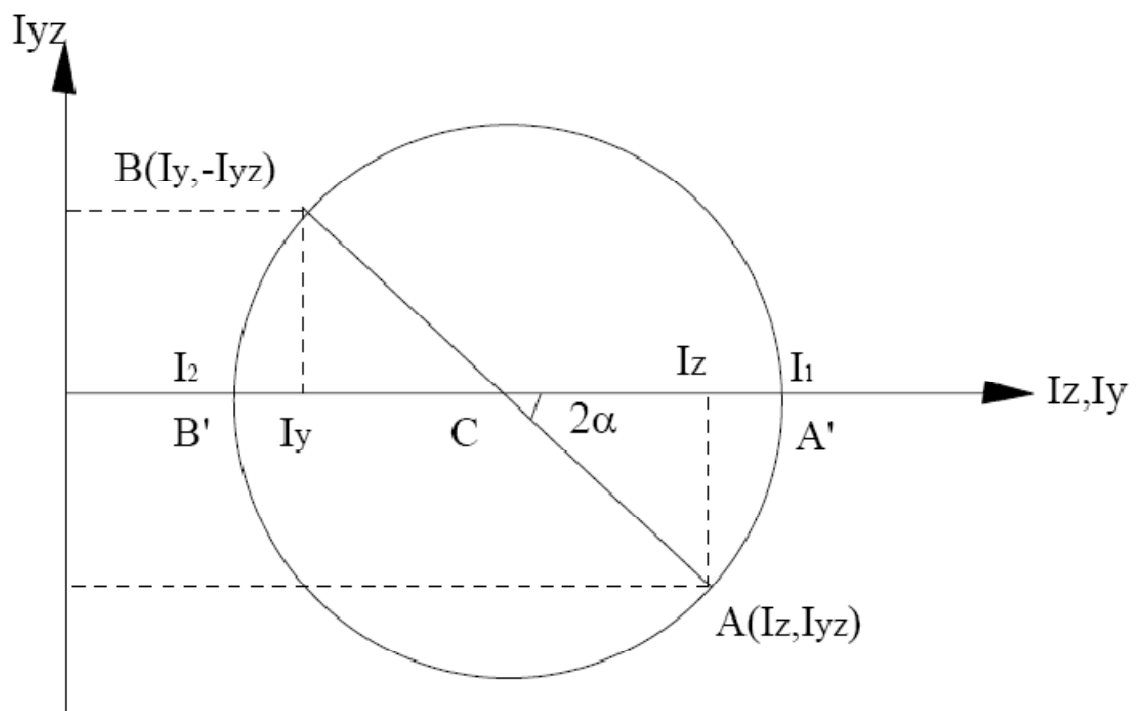
- On relie AB (diamètre qui coupe l'axe  $O I_{y,z}$  en C).

- Le rayon du cercle est:  $AC = BC = \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$

- On trace le cercle qui coupe les abscisses en A' et B'

- On mesure les distances OA' et OB' et on obtient  $I_1$  et  $I_2$

- On mesure l'angle  $ACA' = 2\alpha$



**Fig. 5**